Asymptotic expansion of an oscillating integral on a hypersurface

橋本, 直樹

数理解析研究所講究録
第 756 巻 1991 年 151-154

Asymptotic expansion of an oscillating integral on a hypersurface

東工大物理　　橋本直樹 (Naoki Hashimoto)

$(f,g):(\mathbf{R}^n,\vec{0})\rightarrow(\mathbf{R}^2,\vec{0})$ を $\mathbf{R}^n$ の原点の近傍での解析関数の芽とする。 この小論では、gは、原点の近傍で smooth と仮定する。 このとき $f(x)$ を phase 関数、$g(x)=0$ を束縛方程式とした振動積分

$$
(1) \qquad I(\tau,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{i\tau f(x)}\delta(g(x))\varphi(x)dx
$$

を考え、この積分の$\tau\rightarrow\infty$ での漸近展開を求めることを目的とする。 ここで、$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ であり、また$\delta(g(x))$ は、拘束 $g(x)=0$ を表す"delta"関数である。この種の振動積分は、数理物理、または理論物理学にしばしば登場するものである。 (1) の振動積分の漸近展開の存在証明は、Malgrange[1]、または、Jeanquatier[2]の方法により容易に示せるので、その漸近展開を具体的に求めることが問題となる。そのために、Varchenko[3]の方法と同様に、トーラス埋め込みの方法を用いて、その展開を構成する。ここでは、トーラス埋め込みの記号、方法等は Oka[4,5]の理論に従って計算する。

$h(z)=\Sigma a_\nu z^\nu$ を $\mathbf{C}^n$ における解析関数としたとき、$\Gamma_+(h)$ で Newton 多面体、$\Gamma(h)$ で Newton 図形、$\Gamma^*(h)$ でその双対 Newton 図形を表す。 $P={}^t(p_1,\cdots,p_n)$ を dual weight vector としたとき、$P(x)=\Sigma_{i=1}^n p_ix_i$ $(x_i\in\mathbf{R}^n)$ として次の量を定義する。

$$
d(P;h)=min\{P(x);x\in\Gamma_+(h)\},
$$

$$
\Delta(P;h)=\{x\in\Gamma_+(g);P(x)=d(P;h)\}.
$$

また、$h_P = h_{\Delta(P;h)} = \Sigma_{\nu\in\Delta(P;h)} a_\nu z^\nu$ を face function という。振動積分 (1) では、$f(x)$ 、$g(x)$ が実数値実解析関数として与えられるが、その変数を complex に拡張して、複素解析関数としての complete intersection variety に対するトーラス埋め込みの理論（Khovansky[6], Oka[5]）を用いる。その結果得られる toric variety $X(\Gamma)$ $(\Gamma = \Gamma(f,g))$ の実形を $Y(\Gamma)$ と書くことにする。これは、その $X(\Gamma)$ での座標変換がすべて実で書かかれることから意味を持っている。

<u>定義</u>　$(f,g) : (\mathbf{R}^n, \vec{0}) \to (\mathbf{R}^2, \vec{0})$, $f(0) = g(0) = 0$ としたとき $W := \{x \in U \subset \mathbf{R}^n; f(x) = g(x) = 0\}$ が Newton 図形に関して原点で non-degenerate complete intersection variety とは、任意の dual vector Pに対して、2-form $df_P \wedge dg_P$が $W^*(P) = \{x \in \mathbf{R}^{*n}; f_P = g_P = 0\}$ 上で 0 にならないこととする。今、任意の dual vector $P_i = {}^t(p_{i1}, \cdots, p_{in})$ に対して $|P_i| = \Sigma_{j=1}^n p_{ij}$ と書くことにする。

<u>定義</u>　$\alpha(P_i, g) := |P_i| - 1 - d(P_i, g)$ としたとき resolution $\pi : Y(\Gamma) \to \mathbf{R}^n$ に対して

$$M_Y = \left\{ (d(P_i,f), \alpha(P_i,g)) \mid d(P_i,f) > 0, (d(P_i,f), \alpha(P_i,g)) \neq (1,0), \right.$$
$$\left. \text{各} simplicil\ cone \text{上で} i = 1, \cdots, n \right\}$$

を**重複度** (multiplicity) の集合といい、また

$$\beta_Y = \begin{cases} max\{-\dfrac{\alpha(P_i,g)+1}{d(P_i,f)}; (d(P_i,f), \alpha(P_i,g)) \in M_Y, dim\Delta(P_i,g) > 0\} & (M_Y \neq \phi) \\ -\infty & (M_Y = \phi) \end{cases}$$

と置き, これを**重み** (weight) と呼ぶ。

積分 $I(\tau, \varphi)$ のτに対する漸近展開の最高ベキのφ に関する最大値を$\beta(f,g)$ と書き、**振動積分指数** (oscillation index) ということにする。以上の準備の下に、我々の主要結果は次の定理で与えられる。

<u>定理</u>　$(f,g) : (\mathbf{R}^n, \vec{0}) \to (\mathbf{R}^2, \vec{0})$ を原点$\vec{0} \in \mathbf{R}^n$での解析写像の芽で $f(0) = g(0) = 0$ を満たすものとする。また、$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = g(x) = 0\}$ は原点に孤立特異点をもつ

complete intersection variety で、$g(x)$ を smooth な関数とする。また、U を $\mathbf{R}^n$ の原点の近傍としたとき $\{x \in U; f(x) = g(x) = 0\}$ は、原点$\vec{0} \in \mathbf{R}^n$で non-degenerate complete intersection variety とする。$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ は、原点の十分近い近傍に support を持つ関数で、$f(x), g(x)$ は convenient と仮定する。 この時、漸近展開

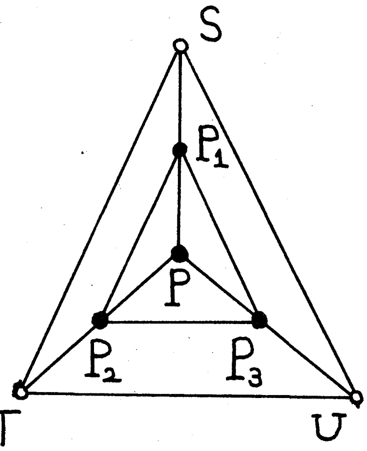
$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f(x)} \delta(g(x)) \varphi(x) dx \sim \sum_p \sum_{k=1}^{n-2} a_{p,k}(\varphi) \tau^p (log\tau)^k$$

が $|\tau| \to \infty$ で成立し、以下の性質を持つ。

（1） τ のベキ p と $log\tau$ のベキ kは、トーラス埋め込みの方法により具体的に計算でき、その weight β_Y は、Newton 図形から直接求めることができる。

（2） $\beta_Y > -1, \varphi(0) > 0, \varphi(x) \geq 0$ のとき、$\beta(f,g) = \beta_Y$.

以下、1つの例を与える。



例 $f(x,y,z) = x^8 + y^8 + z^8 + x^2y^2z^2$, $g(x,y,z) = x + y + z$とする。具体的に計算する方法を用いれば resolution グラフは、右図のようになり、$P = {}^t(1,1,1)$,$P_1 = {}^t(2,1,1)$, $P_2 = {}^t(1,2,1)$,$P_3 = {}^t(1,1,2)$,$S = {}^t(1,0,0)$,$T = {}^t(0,1,0)$, $U = {}^t(0,0,1)$ と求められる。 $\tau(P_j) = -\frac{\alpha(P_j,g)+1}{d(P_j,f)}$ と置くと、今の場合$\tau(P) = -\frac{1}{3}$, $\tau(P_i) = -\frac{3}{8}$ $(i = 1,2,3)$ となる。$\beta_Y = max\{\tau(P), \tau(P_i)(i = 1,2,3)\}$ として求めれるので、故に、$\beta_Y = -\frac{1}{3}$。 このときは、$\beta_Y > -1$ を満たすので$\beta(f,g) = -\frac{1}{3}$である。これは、Newton 図形から直接求めることもできる。

References

[1] B.Malgrange Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Ser.4, 7-3(1974),405-430

[2] P.Jeanquartier, Devéloppment asymptotique de la distribution de Dirac, C.R. Acad. Sc. Paris **271** Ser.A (1970),1159-1161

[3] A.N.Varchenko, Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals, Funct. Analy. Appl. **10**-3(1976), 175-196

[4] M.Oka, On the Resolution of Hypersurface Singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics **8**(1986),405-436

[5] M.Oka, Principal Zeta-function of Non-Degenerate complete intersection singularity, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.IA **37**,No.1(1990),11-32

[6] A.G.Khovanskii, Newton polyhedra and the genus of complete intersections, Funkts. Anal. Prilozhen. **12**,No.1(1977),51-61